Mathematica - Revista eletrônica de divulgação matemática.
**V. 3** (2023) - pp. 37 - 45


# Caracterização dos conjuntos compactos da reta real

*Edson Carlos Licurgo Santos - Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Toledo*

(*Recebido em 15/11/2023. Aceito em 29/11/2023. Publicado em 20/12/2023*)

**Resumo:** Muitas das propriedades e aplicações das funções reais contínuas são obtidas em conjuntos compactos. Nosso objetivo aqui é caracterizar os conjuntos compactos da reta real. Inicialmente faremos uma apresentação dos conceitos topológicos da reta real, entre eles, as definições de conjunto aberto, conjunto fechado e conjunto compacto. O nosso resultado principal apresentará uma equivalência de quatro definições distintas de conjunto compacto da reta real.

**Palavras-chave:** Conjuntos compactos; Compacidade da reta real.

## 1 Noções preliminares

Vamos iniciar com algumas noções preliminares que também vão permitir fixar algumas notações. Em alguns casos apresentaremos os conceitos de forma bem sucinta e rápida. Mais detalhes ou mais resultados sobre os temas abordados neste texto podem ser encontrados em Lima (1976) e Figueiredo (1975).

**Definição 1.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é supremo do conjunto $X$, e escrevemos $a = \sup X$, se
*i*) $x \leq a$, para todo $x \in X$;
*ii*) Dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in X$ tal que $a - \varepsilon < b$.

**Definição 2.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ínfimo do conjunto $X$, e escrevemos $a = \inf X$, se
*i*) $a \leq x$, para todo $x \in X$;
*ii*) Dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in X$ tal que $b < a + \varepsilon$.

**Definição 3.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $X$ é enumerável se $X$ é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

**Definição 4.** Seja $(x_n)$ uma sequência de números reais. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o limite da sequência $(x_n)$, e escrevemos $a = \lim x_n$ se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n > n_0.$$

Neste caso também dizemos que $(x_n)$ converge para $a$ e escrevemos $x_n \to a$.

## 2 Conjuntos abertos

**Definição 5.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $x$ é um ponto interior de $X$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) \subset X$. O Conjunto dos pontos interiores de $X$ é chamado de interior de $X$ e é denotado por $int(X)$. Dizemos que o conjunto $X$ é aberto se $int(X) = X$.

Podemos observar que $int(X) \subset X$, qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}$. Mais ainda, se $int(X) \neq \emptyset$, então $X$ contém um intervalo da reta e portanto $X$ é não-enumerável. Outro resultado útil a respeito do interior de um conjunto é que se $X \subset Y$, então $int(X) \subset int(Y)$.

**Exemplo 1.** *a*) Os exemplos triviais de conjuntos aberto da reta são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$. De fato, $\emptyset$ é aberto pois se não o fosse deveríamos apresentar um elemento no conjunto vazio que não está no seu interior, o que é um absurdo. $\mathbb{R}$ por sua vez, é aberto pois dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos claramente $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$ dado.

*b*) Os intervalos abertos são exemplos canônicos de conjuntos abertos da reta real. Consideramos o intervalo aberto $(a, b)$. Dado $x \in (a, b)$, escolhemos $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$. Logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ e $(a, b) \subset int((a, b))$. Portanto $(a, b)$ é um conjunto aberto. Já para o intervalo fechado $[a, b]$, como $(a, b) \subset [a, b]$, então temos que $(a, b) = int((a, b)) \subset int([a, b]) \subset [a, b]$. Podemos ver claramente que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \not\subset [a, b]$ qualquer que seja $\varepsilon > 0$ e por este motivo $a \notin int([a, b])$. Pelo mesmo motivo $b \notin int([a, b])$. Assim, $int([a, b]) = (a, b)$. De modo análogo podemos mostrar que $int((a, b]) = int([a, b)) = (a, b)$.

*c*) Temos que $int(\mathbb{Q}) = \emptyset$, pois $\mathbb{Q}$ é enumerável. Também temos que $int(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \emptyset$, mesmo sendo $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não-enumerável.

**Teorema 6.** *a*) *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos abertos, então $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é um conjunto aberto.*
*b*) *Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos abertos, então $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

*Demonstração.* *a*) Dado $x \in A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, $x \in A_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$, por hipótese, existem $\varepsilon_j > 0$ tais que $(x - \varepsilon_j, x + \varepsilon_j) \subset A_j$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_j; j = 1, \ldots, n\}$. Logo $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (x - \varepsilon_j, x + \varepsilon_j) \subset A_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A$ e $A$ é aberto.

*b*) Dado $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então $x \in A_\lambda$ para algum $\lambda \in L$. Logo, como $A_\lambda$ é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda$. Portanto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A$ e $A$ é aberto. □

**Exemplo 2.** *a*) A interseção infinita, mesmo que enumerável, de conjunto abertos pode não ser um conjunto aberto. De fato, se pomos $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, então cada $A_n$ é um conjunto aberto, mas $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$, que não é conjunto aberto.

*b*) Como $int(X)$ pode ser representado como a reunião de todos os conjuntos abertos contidos em $X$, então $int(X)$ é um conjunto aberto e $int(int(X)) = int(X)$.

Queremos agora caracterizar os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ em termos de intervalos abertos.

**Lema 7.** *Seja $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma família arbitrária de intervalos abertos, tal que $p \in I_\lambda$, para todo $\lambda \in L$. Então $A = \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$ é um intervalo aberto.*

*Demonstração.* Para cada $\lambda \in L$, escrevemos $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$. Pode ocorrer $a_\lambda = -\infty$ ou $b_\lambda = +\infty$, para algum $\lambda \in L$. Como $a_\lambda < p < b_\mu$, temos que $a_\lambda < b_\mu$, para todos $\lambda, \mu \in L$. Sejam $a = \inf\{a_\lambda, \lambda \in L\}$ e $b = \sup\{b_\lambda, \lambda \in L\}$. Pode ocorrer $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. Queremos provar que $(a, b) = A = \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$. Claro que $A \subset (a, b)$. Dado $x \in (a, b)$, pelas definições de supremo e ínfimo, ou pelas propriedades de conjuntos ilimitados, temos que existem $\lambda, \mu \in L$ tais que $a_\lambda < x$ e $x < b_\mu$. Se $x < b_\lambda$, então $x \in I_\lambda \subset A$. Se $x > b_\lambda$, então temos $a_\mu < b_\lambda \leq x$ e $x \in I_\mu \subset A$. Isto conclui a demonstração. □

**Teorema 8.** *Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, então existe uma única família enumerável de intervalos abertos, dois a dois disjuntos, $(I_j)_{j\in M\subset\mathbb{N}}$ tal que $A = \bigcup_{j\in M} I_j$.*

*Demonstração.* Para cada $x \in A$, seja $I_x$ a reunião de todos os intervalos abertos contendo $x$ e contidos em $A$. Pelo lema anterior, $I_x$ é um intervalo aberto. Dados $x, y \in A$, queremos mostrar que $I_x \cap I_y = \emptyset$ ou $I_x = I_y$. Se $z \in I_x \cap I_y$, então $I = I_x \cup I_y$ é um intervalo aberto contendo $x$ e contido em $A$. Logo $I \subset I_x$ e $I_y \subset I_x$. De modo análogo, $I_x \subset I_y$. Portanto $I_x = I_y$. Podemos afirmar que $A$ é a reunião de intervalos abertos, dois a dois disjuntos.

Vamos mostrar que esta reunião é enumerável. Para cada $I_x$, com $x \in A$, escolhemos um número racional $r(I_x) \in I_x$. A função $I_x \mapsto r(I_x)$ é injetiva, pois se $I_x \neq I_y$, então $I_x \cap I_y = \emptyset$ e $r(I_x) \neq r(I_y)$. Como o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é enumerável, então a família $(I_x)_{x\in A}$ é enumerável.

Falta provar a unicidade. Vamos supor que $A = \bigcup_m J_m$, onde os intervalos $J_m$ são abertos e dois a dois disjuntos. Escrevemos $J_m = (a_m, b_m)$. Vamos provar que $a_m \notin A$. Para isso, suponha por contradição que $a_m \in A$. Então $a_m \in J_p = (a_p, b_p)$, para algum $J_p \neq J_m$. Seja $b = \min\{b_m, b_p\}$. Logo $(a_m, b) \subset J_m \cap J_p$ contradizendo o fato de que $J_m$ e $J_p$ são dois a dois disjuntos. Segue que $a_m \notin A$ e do mesmo modo mostra-se que $b_m \notin A$. Isto mostra que para todo $m$ e $x \in J_m$, $J_m$ é o maior, no sentido de inclusão, intervalo contendo $x$ e contido em $A$. Logo $J_m = I_x$, provando a unicidade. □

**Corolário 9.** *Seja $I$ um intervalo aberto tal que $I = A \cup B$, onde $A$ e $B$ são abertos e disjuntos, então ($A = \emptyset$ e $B = I$) ou ($A = I$ e $B = \emptyset$).*

*Demonstração.* Basta aplicar a unicidade do teorema aos conjuntos $A$ e $B$, se ambos são não-vazios. □

## 3 Conjuntos fechados

**Definição 10.** Dizemos que um ponto $a$ é aderente ao conjunto $X$ se $a$ é o limite de uma sequência $(x_n)$ de pontos de $X$. O conjunto dos pontos aderentes ao conjunto $X$ é chamado fecho de $X$ e é denotado $\overline{X}$. Dizemos que $X$ é fechado se $\overline{X} = X$.

Podemos observar que $X \subset \overline{X}$, pois para todo $x \in X$, podemos tomar a sequência constante convergindo para $x$.

**Teorema 11.** *São equivalentes:*
*i)* $a \in \overline{X}$*;*
*ii) para todo* $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$*;*
*iii) Se* $I$ *é um intervalo aberto contendo* $a$*, então* $I \cap X \neq \emptyset$*.*

*Demonstração. i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Vamos supor que $a = \lim x_n$, onde $x_n \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ( $\Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$), para todo $n > n_0$. Logo, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X$, para todo $n > n_0$.

*ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. Dado um intervalo aberto $I$ contendo $a$, como $I$ é um conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset I$. Por hipótese $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Logo $I \cap X \neq \emptyset$.

*iii)* $\Rightarrow$ *ii)*. É claro.

*ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Dado $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, por hipótese, obtemos $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap X$. Logo, $(x_n)$ é uma sequência de pontos de $X$ e $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Portanto, se $n > n_0$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ e $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \subset \left(a - \frac{1}{n_0}, a + \frac{1}{n_0}\right) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, como queríamos. $\square$

**Exemplo 3.** *a)* Se $X$ é limitado superiormente (resp. inferiormente), então $\sup X \in \overline{X}$ (resp. $\inf X \in \overline{X}$).

*b)* $\overline{(a, b)} = [a, b]$. De fato, $a = \inf(a, b) \in \overline{(a, b)}$, e dado qualquer $c < a$ tomamos $\varepsilon = (a - c) > 0$ e temos que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap (a, b) = \emptyset$ mostrando que $c \notin \overline{(a, b)}$. De outra forma $\overline{(a, b)}$ não contém nenhum número menor do que $a$. Da mesma forma $b = \sup(a, b) \in \overline{(a, b)}$, e também, dado qualquer $c > b$, então com $\varepsilon = (c - b) > 0$ temos que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap (a, b) = \emptyset$. Assim, nenhum número maior do que $b$ pode pertencer a $\overline{(a, b)}$.

*c)* De modo análogo ao item anterior podemos mostrar que $\overline{[a, b]} = \overline{(a, b]} = \overline{[a, b)} = [a, b]$.

*d)* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Podemos observar que existem conjuntos que não são abertos e nem fechados. Por exemplo, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $[a, b)$. Por outro lado, os únicos conjuntos que são abertos e fechados são $\mathbb{R}$ e $\emptyset$. Esta é uma conclusão que vamos tirar do próximo Teorema.

**Teorema 12.** $X \subset \mathbb{R}$ *é fechado se, e somente se, seu complentar* $\mathbb{R} - X$ *é aberto.*

*Demonstração.* Vamos supor que $X$ é fechado. Dado $x \in \mathbb{R} - X$, então $x \notin X = \overline{X}$. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = \emptyset$. Logo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - X$ e $\mathbb{R} - X$ é aberto. Para a recíproca supomos que $\mathbb{R} - X$ é aberto. Se $X$ não é fechado, existe $x \in \overline{X}$, tal que $x \notin X$. Logo $x \in \mathbb{R} - X = int(\mathbb{R} - X)$. Isto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - X$. Portanto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = \emptyset$ e $x \notin \overline{X}$, o que é uma contradição. □

**Corolário 13.** *a) $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos fechados;*

*b) Se $F_1, F_2, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados, então $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ é um conjunto fechado;*

*c) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de arbitrária de conjuntos fechados, então $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* *a)* $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos fechados pois seus respectivos complementares $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos abertos.

*b)* Sejam $A_j = \mathbb{R} - F_j$, $1 \leq j \leq n$. Pelo Teorema anterior $A_j$ é uma conjunto aberto, para todo $1 \leq j \leq n$. Logo $A = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ é um conjunto aberto. Portanto

$$\mathbb{R} - A = \mathbb{R} - \bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n} (\mathbb{R} - A_j) = \bigcup_{j=1}^{n} F_j = F$$

é fechado.

*c)* Sejam $A_\lambda = \mathbb{R} - F_\lambda$, $\lambda \in L$. Logo $A_\lambda$ é aberto e $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto. Portanto

$$\mathbb{R} - A = \mathbb{R} - \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (\mathbb{R} - A_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = F$$

é fechado. □

Podemos observar que a reunião infinita, mesmo que enumerável, de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado. Por exemplo, $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$, $\{x\}$ é um conjunto fechado, para cada $x \in \mathbb{R}$, mas $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

**Corolário 14.** *Se $A \subset \mathbb{R}$ é aberto e fechado, então $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Temos que $A$ e $\mathbb{R} - A$ são abertos. Como $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} - A)$, pelo Corolário 9, $A = \emptyset$ ou $A = \mathbb{R}$. □

**Teorema 15.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Então $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, ou seja, $\overline{X}$ é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que $\mathbb{R} - \overline{X}$ é um conjunto aberto. Dado $x \in \mathbb{R} - \overline{X}$, então $x \notin \overline{X}$ e existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X = \emptyset$. Logo, se $y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, então $y \notin \overline{X}$. Portanto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \overline{X} = \emptyset$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{R} - \overline{X}$, mostrando que $\mathbb{R} - \overline{X}$ é aberto e que $\overline{X}$ é fechado, como queríamos. □

## 4 Ponto de acumulação

**Definição 16.** Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $a$ é um ponto de acumulação de $X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$. Isto significa que todo intervalo aberto contendo $a$, contém algum ponto de $X$, diferente de $a$. O conjunto dos pontos de acumulação de $X$ é chamado de derivado de $X$ e é denotado $X'$. Um ponto $a \in X$ que não é ponto de acumulação de $X$ é chamado de ponto isolado.

**Teorema 17.** *São equivalentes:*
*i)* $a \in X'$*;*
*ii)* $a = \lim x_n$*, onde* $(x_n)$ *é uma sequência de pontos de* $X$*, dois a dois distintos;*
*iii) Todo intervalo aberto contendo* $a$*, contém uma infinidade de pontos de* $X$*.*

*Demonstração. i)* $\Rightarrow$ *ii).* Dado $\varepsilon_1 = 1$, por hipótese, existe $x_1 \in X$ tal que $0 < |x_1 - a| < \varepsilon_1$. Dado $\varepsilon_2 = \min\{\frac{|x_1 - a|}{2}, \frac{1}{2}\}$, existe $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < \varepsilon_2$. Procedendo desta forma obtemos uma sequência $(x_n)$ de pontos de $X$, dois a dois distintos, tal que $a = \lim x_n$.

*ii)* $\Rightarrow$ *iii).* Dado um intervalo aberto $I$ contendo $a$, por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $x_n \in I$. Como a sequência $(x_n)$ é formada por pontos de $X$, dois a dois distintos, então $Y = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$ é um conjunto infinito contido em $I$ e $Y \subset X$.

*iii)* $\Rightarrow$ *i).* Dado $\varepsilon > 0$, da hipótese, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de $X$. Logo, existe $x \in X$, com $x \neq a$ tal que $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Portanto $0 < |x - a| < \varepsilon$, como queríamos. $\square$

**Exemplo 4.** Temos que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}' = \mathbb{N}' = \emptyset$ e $(a, b)' = [a, b]$. Também, se $X = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$, então $X' = \{0\}$.

**Teorema 18.** *Seja* $X \subset \mathbb{R}$*. Então* $\overline{X} = X \cup X'$*.*

*Demonstração.* Claro que, pelas definições dadas, $X \cup X' \subset \overline{X}$. Seja $x \in \overline{X}$, tal que $x \notin X$. Dado $\varepsilon > 0$ temos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $x \notin X$, então existe $y \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X$, com $y \neq x$, ou seja, $0 < |y - x| < \varepsilon$. Portanto $x \in X'$ e $\overline{X} \subset X \cup X'$. $\square$

## 5 Conjuntos compactos

**Definição 19.** Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L_1}$, $L_1 \subset L$, para a qual ainda vale $X \subset \bigcup_{\lambda \in L_1} C_\lambda$.

Podemos agora enunciar o teorema que vai nos permitir definir conjuntos compactos na reta.

**Teorema 20.** *As seguintes afirmações sobre* $K \subset \mathbb{R}$ *são equivalentes:*
*a)* $K$ *é limitado e fechado;*

*b) Toda cobertura por abertos de $K$ possui uma subcobertura finita;*

*c) Todo subconjunto infinito de $K$ possui um ponto de acumulação $a \in K$;*

*d) Toda sequência de pontos de $K$ possui uma subsequência que converge para algum ponto de $K$.*

*Demonstração.* $a) \Rightarrow b)$. Primeiramente vamos supor que $K = [a, b]$. Dada uma cobertura $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ de $[a, b]$ por conjuntos abertos, vamos supor que não existe uma subcobertura finita. O ponto médio do intervalo $[a, b]$, $\frac{a+b}{2}$, o divide em dois intervalos de comprimento $\frac{b-a}{2}$. Pelo menos um deles não pode ser coberto por um número finito dos $C_\lambda$. Digamos $[a_1, b_1]$. Começando agora com $[a_1, b_1]$ repetimos o processo infinitas vezes e obtemos $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$, onde o comprimento de $[a_n, b_n]$ é $\frac{a+b}{2^n}$ e nenhum deles pode ser coberto por um número finito dos $C_\lambda$. Afirmamos que existe $c \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, temos que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. O conjunto $A = \{a_j, \quad j \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente. Seja $c = \sup A$. Temos que $a_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $c \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois cada $b_n$ é cota superior de $A$. Logo $c \in [a_n, b_n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular $c \in [a, b]$. Logo, existe $\lambda \in L$ tal que $c \in C_\lambda$. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{a+b}{2^m} < \varepsilon$. Segue que $c \in [a_m, b_m] \subset (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset C_\lambda$ e $[a_m, b_m]$ pode ser coberto por um único $C_\lambda$, o que é uma contradição. No caso geral $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$. Seja $[a, b]$ um intervalo limitado e fechado contendo $K$. Isto é possível pois $K$ é limitado. Seja $A = \mathbb{R} - K$. Temos que $[a, b] \subset \left( \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda \cup A \right)$ é uma cobertura por aberto de $[a, b]$, pois $K$ é fechado. Pelo que já foi visto, existem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tais que $[a, b] \subset (C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n} \cup A)$. Portanto $K \subset (C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_n} \cup A)$ é uma cobertura finita de $K$.

$b) \Rightarrow c)$. Seja $X \subset K$ um conjunto que não possui pontos de acumulação em $K$. Dado $x \in K$, existe um intervalo aberto $I_x$, tal que, $I_x \cap X = \{x\}$ se $x \in X$, ou $I_x \cap X = \emptyset$ se $x \notin X$. Logo, $K \subset \bigcup_{x \in K} I_x$. Por hipótese, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tais que $K \subset (I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \cdots \cup I_{x_n})$. Em particular $X \subset (I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \cdots \cup I_{x_n})$. Como cada $I_{x_j}$ contém no máximo um elemento de $X$, então $X$ é finito. Isto prova $c)$.

$c) \Rightarrow d)$. Seja $(x_n)$ uma sequência de pontos de $K$. Se o conjunto $X = \{x_j, \quad j \in \mathbb{N}\}$ é finito, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x_{n_0}$, para todo $n > n_0$. Obtemos $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$ uma subsequência constante e portanto convergente para $x_{n_0} \in K$. Se $X$ é infinito, então por hipótese, $X$ possui um ponto de acumulação $a \in K$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ contém uma infinidade de pontos de $X$ e portanto contém termos $x_n$ de índices arbitrariamente grandes. Dado $\varepsilon = 1$ escolhemos $x_{n_1} \in (a-1, a+1)$. Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$ escolhemos $x_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ com $n_2 > n_1$. Isto é possível pois $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ contém termos $x_n$ de índices arbitrariamente grandes. Procedendo desta forma obtemos uma subsequêcia $(x_{n_i})$ que converge para $a \in K$, pois $|x_{n_i} - a| < \frac{1}{i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

$d) \Rightarrow a)$. Se $K$ não é limitado, existem $x_1, x_2 \in K$, com $x_2 > x_1 + 1$. Também existe $x_3 \in K$ tal que $x_3 > x_2 + 1$. Procedendo desta forma obtemos uma sequeência $(x_n)$ que não possui subsequência convergente, pois qualquer subsequência é ilimitada. Se $K$ não é fechado, existe

$x \in \overline{K}$ com $x \notin K$. Logo, existe uma sequência $(x_n)$ de pontos de $K$ tal que $\lim x_n = x$. Toda subsequência desta sequência deve convergir para $x$ e $x \notin K$. Com esta contradição completamos a demonstração. $\square$

**Definição 21.** Seja $K \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $K$ é compacto se for satisfeita uma das condições do Teorema 4.2 sobre $K$.

No Teorema 20, as implicações $a) \Rightarrow b)$ e $a) \Rightarrow c)$ são conhecidas, respectivamente, por Teorema de Borel-Lebesgue e Teorema de Bolzano-Weierstrass.

**Exemplo 5.** $a)$ Todo conjunto infinito e limitado $X$ possui um ponto de acumulação. De fato, $X \subset [a, b]$ e $[a, b]$ é compacto.

$b)$ O conjunto $X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ é compacto, pois é limitado e fechado. Por outro lado, $Y = X - \{0\} = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ não é compacto. De fato, se para cada $n \in \mathbb{N}$ pomos $I_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right], \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]\right)$, então $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ é uma cobertura por aberto de $Y$ que não possui subcobertura finita, pois $I_n \cap Y = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

$c)$ Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, não são compactos.

$d)$ Um exemplo importante de conjunto compacto não-enumerável é o conjunto de Cantor. Dado o intervalo $[0, 1]$ retiramos deste o seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Em seguida, retiramos de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ o seu terço médio aberto $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e de $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ o seu terço médio aberto $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Ficamos então com $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$. O próximo passo é retirar deses intervalos os seus respectivos terços médios abertos. Repete-se o processo indefinidamente. O conjunto $K$ dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. Se indicamos por $I_1, I_2, \dots$ os intervalos retirados, então $K = [0, 1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1] \cap \left(\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right)$ é fechado e, como é limitado, $K$ é compacto.

Em espaços métricos pode ocorrer de um conjunto $X$ ser limitado e fechado sem que toda cobertura por abertos de $X$ possua subcobertura finita. Consideramos, por Exemplo $l^2$, o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, x_2, \dots)$ de números reais tais que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Dados $x, y \in l^2$, definimos $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ e a distância $d(x, y)$ como sendo $d(x, y) = |x - y|$. Desta forma, definimos o análogo ao intervalo aberto da reta como sendo $B(x, r) = \{y \in l^2; |y - x| < r\}$, a bola aberta e centro $x$ e raio $r$. A definição de conjunto aberto é análoga ao caso real, considerando agora as bolas abertas. Seja $X = \{e_1, e_2, \dots\} \subset l^2$, onde $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (1 na $i$-ésima posição). Se $m \neq n$, então $|e_m - e_n| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Isto significa que $X$ é limitado. Mais ainda, como todos os pontos de $X$ são isolados, então $X$ é fechado. Mas, sendo discreto (sem pontos de acumulação) e infinito, $X$ não é compacto.

## 6 Considerações finais

Conjuntos compactos constituem uma importante classe de conjuntos na análise real (ou em $\mathbb{R}^n$ ou mesmo na análise funcional). Destacamos por exemplo o Teorema de Weierstrass, que afirma que toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ definida em um compacto $X \subset \mathbb{R}$, admite ponto de máximo e de mínimo.

Nestes termos, ressaltamos a importância do estudo dos conjuntos compactos. O Teorema 20 reúne quatro modos distintos de afirmar que um subconjunto da reta real é compacto.

## Agradecimento

O autor agradece aos revisores pelo apontamento de erros e as correções que proporcionaram a melhoria deste texto.

## Referências

Lima, Elon Lages. *Curso de análise, volume I.* Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

Figueiredo, Djairo Guedes de. *Análise I.* Rio de Janeiro, LTC, 1975.